

Diszkrét matematika előadás

Aradi Bernadett

2019 ősz

A tárgyhoz tartozó segédanyagok:

<https://arato.inf.unideb.hu/aradi.bernadett>

Témakörök

- 1 Bevezetés: halmazok és függvények, jelölések
- 2 A természetes számok halmaza, teljes indukció
- 3 Az egész számok halmaza
 - Oszthatóság
 - Prímszámok
 - Kongruenciák
- 4 Komplex számok
- 5 Polinomok
- 6 Kombinatorika
- 7 Lineáris algebra
 - Vektorterek
 - Mátrixok, determinánsok
 - Lineáris egyenletrendszerek
 - Lineáris transzformációk
 - Euklideszi terek
- 8 Gráfelmélet

Bevezetés: halmazok

- **Halmaz, halmaz eleme** (jele: $\in$, tagadása: $\notin$): alapfogalmak.
- Halmaz megadása: felsorolással, pl. $\{1, 2, 3\}$,
vagy egy ismert H halmaz elemeire vonatkozó, a halmaz elemeit definiáló T tulajdonság segítségével: $\{x \in H \mid T(x)\}$, pl.

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}.$$

- **Üres halmaz**: az a halmaz, amelynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$.
- Részhalmaz jelölése: $\subset$.
- **Két halmaz egyenlő**, ha elemeik megegyeznek.
Ezzel ekvivalens módon, ha egymás részhalmazai:

$$A = B \iff A \subset B \text{ és } B \subset A.$$

Halmazok számossága és hatványhalmaza

Definíció

Egy halmaz **hatványhalmaza** a halmaz összes lehetséges részhalmazainak a halmaza. Jele az adott A halmaz esetén: $\mathcal{P}(A)$ vagy 2^A .

Pl.: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ esetén:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \\ \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, A\}$$

Definíció

Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor elemeinek számát a halmaz **számosságának** nevezzük.

Jele adott A halmaz esetén: $\#A$.

Tétel

Ha A egy n elemű halmaz, akkor A hatványhalmaza 2^n elemű, azaz

$$\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#A}.$$

Halmazműveletek

Egyváltozós művelet:

- Komplementerképzés: $\bar{A}$

Többsváltozós műveletek:

- Halmazok egyesítése: $\cup$, metszete: $\cap$, különbsége: $\setminus$.
- Szimmetrikus differencia, jele: Δ .

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

pl.: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ esetén $A \Delta B = ?$

- Descartes-szorzat, jele: $\times$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

pl.: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ esetén $A \times B = ?$

Tétel – de Morgan-azonosságok

Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Ekkor

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \text{és} \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Sőt, az azonosságok tetszőlegesen sok halmazra is érvényesek.

Számhalmazok:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: természetes számok halmaza (definíció később)
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: egész számok halmaza
- $\mathbb{Q}$: racionális számok halmaza
- $\mathbb{R}$: valós számok halmaza
- $\mathbb{C}$: komplex számok halmaza (definíció később)

Kvantorok:

- $\exists$: létezik, van olyan (egzisztenciális kvantor)
- $\forall$: minden, bármely (univerzális kvantor)

Pl.: $\exists n \in \mathbb{N} : 2n = 6$, de $\nexists n \in \mathbb{N} : 2n = 7$

$\forall m \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{Z}$, de $\nexists m \in \mathbb{Z} : m \in \mathbb{N}$

Bevezetés: függvények

Függvény: egyértelmű hozzárendelés $x \mapsto f(x)$

Ha az f függvény a D halmazból (értelmezési tartomány) az R halmazba (képtér) képez, akkor a függvény felfogható $(x, f(x))$ rendezett párokként, ahol $x \in D$ és $f(x) \in R$.

$$f: D \rightarrow R, x \mapsto f(x)$$

Azaz a függvény a $D \times R$ Descartes-szorzat egy részhalmazaként is interpretálható, ahol ha

$$f: x \mapsto y_1 \text{ és } f: x \mapsto y_2,$$

akkor szükségképpen $y_1 = y_2$ az egyértelmű hozzárendelés miatt.

Példák függvényekre

- $x \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$
- $x \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(x) := \{\text{egy olyan szám, aminek a négyzete } x\}$
Nem függvény!
- $n \in \mathbb{N}, n \mapsto f(n) := \{\text{egy olyan páratlan szám, ami osztója } n\text{-nek}\}$
Nem függvény!
- $n \in \mathbb{N}, n \mapsto f(n) := \{n \text{ legnagyobb pozitív osztója}\}$
Függvény!

Jelölés

$:=$ jelentése: értékadás, "legyen egyenlő"

Jelölés

Nyilak jelentése: $\rightarrow, \mapsto, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Elemi függvények

- konstans: $f(x) = c$
- elsőfokú (lineáris): $f(x) = mx + b$
- másodfokú: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
gyöktényezős alak: $f(x) = a \cdot \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$
- polinomfüggvény
- exponenciális függvény: $f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$
- logaritmus fv.: $f(x) = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$
- trigonometrikus függvények
- abszolútérték-függvény
- előjelfüggvény

Függvények tulajdonságai

Legyen adott egy

$$f: D \rightarrow R, x \mapsto f(x)$$

függvény.

Definíció

Az f függvény **injektív**, ha $f(a) = f(b)$ azt vonja maga után, hogy $a = b$.

Azaz ebben az esetben f az értelmezési tartomány minden eleméhez *különböző* értéket rendel hozzá.

Definíció

Az f függvény **szürjektív**, ha az R halmaz bármely y eleméhez létezik olyan $x \in D$ elem, hogy $f(x) = y$.

Azaz f akkor szürjektív, ha az R képtér minden eleme képpé válik.

Definíció

Az f függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív is.

A teljes indukciós bizonyítás

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: a természetes számok halmaza

A halmaz struktúrája olyan, hogy ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a **teljes indukciós bizonyítási elvet**:

- (1) Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.
- (2a) Feltesszük, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,
- (2b) majd bebizonyítjuk az állítást $k + 1$ -re.

(2a): **indukciós feltevés** $n = k$ -ra

Példák a teljes indukciós bizonyításra:

- ❶ Az első n természetes szám összege $\frac{n(n+1)}{2}$. Erre alkalmazható. ✓
- ❷ $x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0$. Erre nem alkalmazható!

Példák a teljes indukciós bizonyításra – folytatás

- 3 Igazoljuk, hogy

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- 4 Bizonyítsuk be, hogy

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelölések

$\sum_{i=1}^n$ szumma – összegzés,

$\prod_{i=1}^n$ produktum – szorzás

A természetes számok halmaza

Axiomatikus bevezetése a Peano-axiómákkal történik.

Definíció – Peano-axiómák

- (P1) Az 1 természetes szám. (Ez egy kitüntetett elem.)
- (P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb” természetes szám, amit az n **rákövetkezőjének** nevezünk.
- (P3) Az 1 egyetlen természetes számnak sem a rákövetkezője.
- (P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.
- (P5) **A teljes indukció elve:** ha A egy olyan halmaz, amely
 - ▶ tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
 - ▶ minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,akkor A az összes természetes számot tartalmazza.

A (P1)–(P5) feltételek egyértelműen meghatároznak egy halmazt, amit a **természetes számok halmazának** nevezünk. Jele: $\mathbb{N}$.

Megjegyzések a Peano-axiómákhoz

(P2) Bármely n természetes számhoz egyértelműen megadható egy „1-gyel nagyobb” természetes szám, amit az n **rákövetkezőjének** nevezünk.

$\rightsquigarrow n + 1$, $S(n)$ (S : rákövetkező függvény, successor function)

(P4) Ha két természetes szám rákövetkezője megegyezik, akkor ez a két szám is megegyezik.

Másképpen: a rákövetkező függvény **injektív**.

(P5) A **teljes indukció elve**: ha A egy olyan halmaz, amely

- tartalmazza az 1 kitüntetett elemet és
- minden elemével együtt annak a rákövetkezőjét is tartalmazza,

akkor A az összes természetes számot tartalmazza.

Másképpen: A **induktív halmaz**. $\Rightarrow \mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz.

Egyéb példa induktív halmazra: pozitív számok halmaza ($\mathbb{R}^+$).

A Peano-axiómák matematikai formalizmussal

Definíció – Peano-axiómák

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$(P1) \quad 1 \in \mathbb{N}$$

$$(P2) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \exists S(n) \in \mathbb{N}, S(n) =: n + 1$$

vagy: $\exists S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ún. **rákövetkező függvény**

$$(P3) \quad \nexists n \in \mathbb{N} : S(n) = 1$$

$$(P4) \quad n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$$

(P5)

$$\left. \begin{array}{l} 1 \in A \\ n \in A \Rightarrow S(n) \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{N} \subset A$$

Ekkor $\mathbb{N}$ egyértelműen meghatározott, és ezt a halmazt a **természetes számok halmazának** nevezzük.

Teljes indukciós bizonyítás

A definíció alapján $\mathbb{N}$ elemei:

$$1, S(1), S(S(1)), S(S(S(1))), \dots, S(S(\dots(S(1))\dots)), \dots$$

$$S(1) = 1 + 1 =: 2$$

$$S(S(1)) = S(1) + 1 =: 3$$

A teljes indukció elve azt fejezi ki, hogy az összes természetes szám felírható az 1 kitüntetett elem és az S rákövetkező függvény segítségével. Így ha egy tételt (pl. egy képletet) a természetes számokra szeretnénk igazolni, akkor alkalmazhatjuk a **teljes indukciós bizonyítási elvet**:

- (1) Igazoljuk az állítást $n = 1$ -re.
- (2a) Feltesszük, hogy az állítás igaz egy tetszőleges k természetes számra,
- (2b) majd bebizonyítjuk az állítást $k + 1$ -re.

(2a): **indukciós feltevés** $n = k$ -ra

Az egész számok halmaza

Az egész számok halmazát – felhasználva a már definiált természetes számokat – szintén axiomatikusan vezetjük be. Ehhez szükséges a következő:

Definíció

Legyen A egy nemüres halmaz és $R \subset A \times A$.

R **ekvivalenciareláció**, ha

- reflexív: $\forall a \in A : (a, a) \in R$,
- szimmetrikus: $a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$,
- tranzitív: $a, b, c \in A : (a, b) \in R$ és $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Példák:

- $A = \{\text{egy rögzített síkban az összes háromszög}\}$
 $h_1, h_2 \in A$ esetén $(h_1, h_2) \in R \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} h_1$ és h_2 hasonló háromszögek
 $\Rightarrow$ a hasonlóság ekvivalenciareláció
- $A = \mathbb{N}$
 $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n - m \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$
 $\Rightarrow$ az oszthatóság ekvivalenciareláció

Ekvivalenciareláció – osztályozás

- $A = \mathbb{N}$
 $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n - m \text{ osztható } 3\text{-mal}\}$
 $\Rightarrow$ az oszthatóság ekvivalenciareláció

Az 5 mely számokkal áll relációban? Amelyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul.

Észrevétel: minden szám relációban áll 1-gyel, 2-vel, vagy 3-mal.
 $\Rightarrow$ 3 osztályt kapunk.

Általánosan: minden ekvivalenciareláció osztályozást indukál, az ekvivalenciaosztályokat az egymással relációban álló elemek alkotják.

Mivel

- minden elem beletartozik valamelyik ekvivalenciaosztályba, továbbá
 - bármely két elem osztálya vagy diszjunkt, vagy egybeesik,
- az ekvivalenciaosztályok A egy lefedését alkotják.

Az egész számok halmaza

Jele: $\mathbb{Z}$

Tekintsük az (a, b) alakú rendezett párokat, ahol $a, b \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow A := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
A-n definiálunk egy „egyenlőséget”, amelyet $a \equiv$ szimbólummal jelölünk.
Mikor egyenlő két rendezett pár?

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff a + d = b + c$$

Ekkor $\equiv$ ekvivalenciareláció. (Igazolható: reflexív, szimmetrikus, tranzitív.)
Ezért $\equiv$ osztályozást indukál a rendezett párok $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazán.

Az ekvivalenciaosztályok: $\mathbb{Z}$ elemei.

- Pozitív egészek: (a, b) , ahol $a > b \rightsquigarrow a$ természetes számok
Pl.: az 5 osztálya: $(6, 1), (7, 2), (8, 3), \dots, (105, 100), \dots$
- Negatív egészek: (a, b) , ahol $a < b$
Pl.: a -3 osztálya: $(1, 4), (2, 5), \dots, (52, 55), \dots$
Jelölés: $(a, b) = -(b, a)$
- A nullelem: (a, b) , ahol $a = b$
Egy osztály, a 0 osztálya: $(1, 1), (2, 2), \dots, (71, 71), \dots$

- A teljes definícióhoz – mind $\mathbb{N}$, mind pedig $\mathbb{Z}$ esetén – értelmeznünk kell a műveleteket (összeadás és szorzás), valamint a rendezést ($<$, ill. $\leq$ relációk).
- Ezek definiálásától és tulajdonságaik bizonyításától eltekintünk.

Oszthatóság

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a osztója b -nek, vagy b osztható a -val, ha létezik $c \in \mathbb{Z}$, hogy $b = a \cdot c$.

Jelölés: $a|b$

Tétel – az oszthatóság tulajdonságai

- ① $\forall a \neq 0, a \in \mathbb{Z} : a|0, 1|a, a|a$
- ② Ha $a|b$ és $c \in \mathbb{Z}$, akkor $a|bc$. ($a|b \wedge c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|bc$)
- ③ Ha $a|b_1$ és $a|b_2$, akkor $a|(b_1 + b_2)$.
- ④ Ha $a|b$ és $b|c$, akkor $a|c$.
- ⑤ Ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = \pm b$.

② és ③ $\Rightarrow$ Ha $a|b_i, i = 1, 2, \dots, n$ és $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$a|(b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_nc_n).$$

Oszthatósági szabályok

$$A \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

$$a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, a_n \neq 0.$$

- 2-vel való oszthatóság:

$$A = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10 + a_0$$

$2|10$, ezért ha $2|a_0$, akkor $2|A$

- 5-tel való oszthatóság: A = mint az előbb

$5|10$, ezért ha $5|a_0$, akkor $5|A$

- 4-gyel való oszthatóság: $4 \nmid 10$, de $4|100$

$$A = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_2) \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

$4|100$, ezért ha $4|(a_1 \cdot 10 + a_0)$, akkor $4|A$

- 25-tel való oszthatóság: hasonlóan

Oszthatósági szabályok

- 8-cal való oszthatóság: $8 \nmid 100$, de $8 \mid 1000 \Rightarrow$

$$8 \mid A \iff 8 \mid (100a_2 + 10a_1 + a_0)$$

$100a_2 + 10a_1 + a_0$ éppen A -nak az 1000-rel vett osztási maradéka.

- 3-mal és 9-cel való oszthatóság: $10^k - 1 = 99 \dots 9$
 $\Rightarrow 3 \mid (10^k - 1), 9 \mid (10^k - 1)$

$$\begin{aligned} A &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = \\ &= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1) + \\ &\quad + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

- 11-gyel való oszthatóság: $10^1 + 1 = 11$, $10^2 - 1 = 99$,
 $10^3 + 1 = 1001$, $10^4 - 1 = 9999$, ...

$$\begin{cases} 11 \mid (10^k + 1), & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 11 \mid (10^k - 1), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1(10^1 + 1) - a_1 + a_2(10^2 - 1) + a_2 + \dots = \\ &= (a_1(10^1 + 1) + a_2(10^2 - 1) + \dots) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots) \end{aligned}$$

Definíció

Azt mondjuk, hogy $d \in \mathbb{N}$ az $a \in \mathbb{Z}$ és $b \in \mathbb{Z}$ számok **legnagyobb közös osztója**, ha

- $d|a$ és $d|b$,
- bármely $\bar{d} \in \mathbb{N}$ melyre $\bar{d}|a$ és $\bar{d}|b$, teljesül $\bar{d}|d$ is.

Jele: $d = (a, b)$.

Továbbá $d \in \mathbb{N}$ az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok **legnagyobb közös osztója**, ha

- $d|a_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$,
- bármely $\bar{d} \in \mathbb{N}$ melyre $\bar{d}|a_i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), teljesül $\bar{d}|d$ is.

Definíció

Az a és b egész számok **relatív prímek**, ha $(a, b) = 1$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy $k \in \mathbb{N}$ az $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ számok **legkisebb közös többszöröse**, ha

- $a_i|k$, $i \in \{1, \dots, n\}$,
- bármely $\bar{k} \in \mathbb{N}$ melyre $a_i|\bar{k}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), teljesül $k|\bar{k}$ is.

Jele: $k = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.

A maradékos osztás tétele, Euklideszi algoritmus

Tétel – a maradékos osztás tétele

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ esetén egyértelműen léteznek olyan $q, r \in \mathbb{Z}$ számok, hogy

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

Euklideszi algoritmus

$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, előző tétel $\Rightarrow q, r \in \mathbb{Z}$, jelöljük ezeket q_0, r_0 -al:

$$a = b \cdot q_0 + r_0$$

Ismételjük meg az eljárást b -vel és r_0 -al $\Rightarrow q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$,
majd r_0 -al és r_1 -gyel ($\Rightarrow q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$):

$$b = r_0 \cdot q_1 + r_1$$

$$r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2.$$

Mindig a keletkező maradékokkal folytatva az algoritmust, az véges sok lépésben véget ér, hiszen

$$|b| > |r_0| > |r_1| > |r_2| > \dots > |r_i| > \dots \geq 0.$$

Tétel

Az a és $b \neq 0$ számokkal végzett euklideszi algoritmus utolsó nem 0 maradéka az a és b legnagyobb közös osztója. Továbbá, ha $d := (a, b)$, akkor az

$$ax + by = d \quad (1)$$

egyenlet megoldható az egész számok halmazán (azaz létezik olyan $x, y \in \mathbb{Z}$, hogy (1) teljesül).

Példa: $(1227, 216) = ?$, $(-1227, -216) = ?$

Definíció

Az $ax + by = c$ alakú egyenleteket (ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ismertek, $x, y \in \mathbb{Z}$ ismeretlenek) **lineáris diofantikus egyenleteknek** nevezzük.

Tétel

Az $ax + by = c$ lineáris diofantikus egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha $(a, b) | c$.

Példa: Oldjuk meg a $147x + 69y = 3$ diofantikus egyenletet!

Prímszámok

Minden $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$ számnak van két pozitív osztója: az 1 és az n , ezeket **triviális osztóknak** nevezzük. A többi pozitív osztó n **nem triviális osztója**.

Definíció

Azokat az 1-nél nagyobb természetes számokat, amelyeknek csak triviális osztóik vannak, **prímszámoknak** nevezzük. Azokat, amelyeknek van nem triviális osztójuk is, **összetett számoknak** hívjuk. Az 1 az **egységelem**.

Tétel

Egy $p > 1$ egész szám pontosan akkor prímszám, ha $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $p|ab$ teljesülése $p|a$ vagy $p|b$ fennállását vonja maga után.

Példa: $15|60$

Tétel – a számelmélet alaptétele

Minden 1-nél nagyobb természetes szám felbontható véges sok prímszám szorzatára, és a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. A tételből adódó egyértelmű szorzatot a természetes számok **kanonikus** vagy **prímtényezős alakjának** nevezzük, formája: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ páronként különböző prímek, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$.

Osztók száma

Tétel

Egy $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ kanonikus alakú természetes szám pozitív osztóinak a száma

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1).$$

Példa: $1.455.300 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ és $185.130 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 17$

Tétel

A prímszámok száma végtelen.

Biz.: Indirekt módon tegyük fel, hogy véges sok prímszám van, legyenek ezek $p_1, p_2, \dots, p_k$. Tekintsük a $b = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ számot. Ekkor $b \neq 1$ és b összetett szám, azaz valamely $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ indexre $p_i | b$. Azonban $p_i | \prod p_j$ is, így $p_i | 1$, ami ellentmondás.

Megjegyzés

Az a és b egészek relatív prímek, ha kanonikus alakjukban nincsenek közös prímtényezők.

Kongruenciák

Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a kongruens b -vel modulo m , ha $m \mid (a - b)$.

Jele: $a \equiv b \pmod{m}$, m : a kongruencia modulusa

Példa: $m = 4$ esetén $3 \equiv 11 \pmod{4}$

Azok az $a, b \in \mathbb{Z}$ számok kongruensek modulo m , amelyek az m -mel való osztáskor ugyanazt a maradékot adják.

Tétel

A mod m kongruencia ekvivalenciareláció: reflexív, szimmetrikus, tranzitív.

$\leadsto$ a mod m kongruencia osztályozást indukál, egy osztályban az egymással kongruens számok vannak.

Definíció

A mod m kongruencia által indukált osztályokat **maradékosztályoknak** nevezzük. A maradékosztályok **reprezentánsai**: $0, 1, \dots, m - 1$. Azaz mod m a kapott maradékosztályok száma m .

A kongruencia tulajdonságai

Állítás – a kongruencia tulajdonságai

Legyen $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$) és $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

① Ha $a \equiv b$ és $c \equiv d \pmod{m}$, akkor

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m} \quad \text{és} \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}.$$

② Ha $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$ és $(c, m) = 1$, akkor $a \equiv b$.

Példa: $15 \equiv 63 \pmod{8}$ és $10 \equiv 18 \pmod{8}$

Definíció

Az $a_1, a_2, \dots, a_m$ szám m -est **teljes reprezentáns rendszernek** nevezzük, ha mindegyik maradékosztályból pontosan 1 fordul elő közöttük, azaz

$$a_i \not\equiv a_j \pmod{m}, \text{ ha } i \neq j.$$

Példa: $m = 5$ esetén: 5, 6, 12, 28, 9

Állítás

Ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $(a, m) = (b, m)$.

Redukált maradékosztályok

Definíció

Egy maradékosztályt a **redukált maradékrendszer elemének**, vagy **redukált maradékosztálynak** nevezünk, ha elemei relatív prímek a modulushoz.

Jele: a **mod m** redukált maradékosztályok számát $\varphi(m)$ -mel jelöljük.

Tehát

$$\varphi(m) = \#\{a \in \{1, \dots, m\} \mid (a, m) = 1\}.$$

A φ függvény neve: **Euler-féle φ -függvény**.

A definícióból adódik, hogy $\varphi(1) = 1$.

A maradékosztályok száma „kis” pozitív egészekre:

m	teljes	redukált	$\varphi(m)$
$m = 2$	0,1	1	$\varphi(2) = 1$
$m = 3$	0,1,2	1,2	$\varphi(3) = 2$
$m = 4$	0,1,2,3	1,3	$\varphi(4) = 2$
$m = 5$	0,1,2,3,4	1,2,3,4	$\varphi(5) = 4$
$m = 6$	0,1,2,3,4,5	1,5	$\varphi(6) = 2$
$m = 7$	0,1,2,3,4,5,6	1,2,3,4,5,6	$\varphi(7) = 6$

Az Euler-féle φ -függvény

Állítás

Ha p prím, akkor $\varphi(p) = p - 1$.

Tétel

Az Euler-féle φ -függvény értéke (azaz a redukált maradékosztályok száma) kiszámolható a

$$\varphi(m) = m \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

képlettel, ha m prímtényezős alakja $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$.

Példa: $m = 24$, $\varphi(24) = ?$

Tétel – Euler–Fermat-tétel

Ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Következmény – kis Fermat-tétel

Ha p prím és $p \nmid a$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Példa: 15-tel való osztáskor mennyi a 2^{2019} maradéka?

Kongruencia egyenletek

Tétel

Az $ax \equiv b \pmod{m}$ (lineáris) kongruencia egyenlet pontosan akkor oldható meg az egész számok körében, ha $(a, m) \mid b$.

Biz.: visszavezetjük a feladatot egy lineáris diofantikus egyenletre:

$$\begin{aligned} ax \equiv b \pmod{m} &\Leftrightarrow m \mid (ax - b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z} : my = ax - b \Leftrightarrow ax - my = b \end{aligned}$$

Megjegyzés: ha az egyenletnek $c \in \mathbb{Z}$ egy megoldása, akkor $c + km$ is az.

Példa: $13x \equiv 5 \pmod{29}$

Állítás

Tekintsük az $ax + by = c$ lineáris diofantikus egyenletet. Ha (x_0, y_0) egy ismert megoldása az egyenletnek, akkor az általános megoldás

$$\left(x_0 - t \cdot \frac{b}{(a, b)}, y_0 + t \cdot \frac{a}{(a, b)} \right), \quad t \in \mathbb{Z}$$

alakú.

Komplex számok

Egyenletek megoldhatóságának kérdése különböző számhalmazokban:

- $\mathbb{N}$ -ben: $5 + x = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{Z}$ -ben: $5 \cdot x = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{Q}$ -ban: $x^2 = 3 \Rightarrow$ nem megoldható
- $\mathbb{R}$ -ben: $x^2 = -3 \Rightarrow$ nem megoldható

$\rightsquigarrow$ „bővítsük ki” $\mathbb{R}$ -et $\sqrt{-1}$ -gyel!

Jelölés, definíció

Az $i := \sqrt{-1}$ szimbólum a **képzetes egység**.

Definíció

Az $a + bi$ alakú számokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$, **komplex számoknak** nevezzük. Ezt a számhalmazt $\mathbb{C}$ -vel jelöljük.

Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ez a z komplex szám **algebrai alakja**.

$a = \Re(z)$: z **valós része**

$b = \Im(z)$: z **képzetes része**

Alapműveletek komplex számokkal, ábrázolásuk

Alapműveletek $\mathbb{C}$ -ben

Ha $z = a + bi$ és $w = c + di$ komplex számok, akkor

$$z + w := (a + c) + (b + d)i,$$

$$z \cdot w := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Komplex számok ábrázolása: a Gauss-féle komplex számsíkon.

A $z = a + bi$ komplex számot egyértelműen meghatározza a és b , de másik két érték is:

- z **abszolútértéke**: $r := |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- z **irányszöge** (vagy argumentuma): φ . Ezt úgy választjuk meg, hogy

$$a = r \cdot \cos \varphi,$$

$$b = r \cdot \sin \varphi.$$

Ezek segítségével z felírható

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

alakban is, mely felírás egyértelmű, ha $r > 0$ és $\varphi \in [0, 2\pi[$. Ezt nevezzük a z komplex szám **trigonometrikus alakjának**.

Példák:

- 1 Mi annak a komplex számnak az algebrai alakja, melynek abszolútértéke 3, irányszöge pedig $\frac{\pi}{4}$?
- 2 Mi a $z = \sqrt{3} - i$ komplex szám trigonometrikus alakja?

Definíció

Egy $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

Ekkor

- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2,$
- $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2},$
- $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$

Műveletek a trigonometrikus alakkal

Legyen

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \quad \text{és} \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2).$$

- Szorzás: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Osztás: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
- Hatványozás: ha $z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ és $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)) \quad (\text{Moivre-képlet}).$$

Példa: $z = \sqrt{3} - i$, $z^{60} = ?$

Gyökvonás $\mathbb{C}$ -ben

$$\sqrt[n]{z} = ?$$

Mivel az $x^n = z$ egyenletnek (ahol x ismeretlen) megoldásai z n -edik gyökei, ezért n darab ilyen szám van. $\rightsquigarrow w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$

Ha $w = \varrho \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$ a z -nek n . gyöke, akkor

$$\begin{aligned}\varrho^n = r &\Rightarrow \varrho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{egyértelmű pozitív valós szám}), \\ n\psi \approx \varphi &\Rightarrow n\psi = \varphi + 2k\pi.\end{aligned}$$

Tétel – Komplex szám n . gyökei

Ha $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor az $x^n = z$ egyenletnek pontosan n darab megoldása van, ezek z n . gyökei, és az alábbi képletből adódnak:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Példa: $z = \sqrt{3} - i$, $\sqrt[3]{z} = ?$

Egységgyökök

Definíció

Az 1 (komplex) szám n -edik gyökeit (azaz az $x^n = 1$ egyenlet gyökeit) **n -edik egységgyökök**nek nevezzük.

Mivel

$$z = 1 = 1 + 0 \cdot i = \cos 0 + i \cdot \sin 0,$$

és egy komplex szám n -edik gyökei az

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

képletből adódnak, ezért az n -edik egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Megjegyzés: $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_0 = 1$.

Példák: Mik az n -edik egységgyökök $n = 2$, $n = 3$, ill. $n = 4$ esetén?
Ábrázoljuk ezeket a komplex számsíkon!

Legyen w_j a $z \neq 0$ komplex szám egyik n -edik gyöke, ε_k pedig – mint korábban – jelölje az n -edik egységgyököket ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Ekkor

$$(w_j \cdot \varepsilon_k)^n = w_j^n \cdot \varepsilon_k^n = z \cdot 1 = z.$$

Állítás

Egy komplex szám n -edik gyökeit megkaphatjuk úgy, hogy valamely n -edik gyökét megszorozzuk az összes n -edik egységgyökkel.

Másodfokú egyenletek

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Lehetséges esetek:

- ❶ $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 2$ valós gyök
- ❷ $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 1$ (vagy 2 egybeeső) valós gyök
- ❸ $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 2$ komplex gyök:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Példa: $x^2 + x + 1 = 0$

Polinomok

Definíció

Legyen x egy ún. **határozatlan** (egy szimbólum). A

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

alakú véges összeget, ahol $a_i \in \mathbb{R}$, **polinom**nak nevezzük.

- A valós együtthatós polinomok halmazát $\mathbb{R}[x]$ -szel jelöljük.
- Ha $a_n \neq 0$, akkor n a polinom **fokszáma**. Jele: $\deg(p) = n$.
- Egy n -edfokú polinom esetén a_n -et $p(x)$ **főegyütthatójának**, az a_i -ket **együtthatóknak** hívjuk.
- Ha $p(x) = a_0$, akkor **nulladfokú polinomról**, vagy **konstansról** beszélünk.

Példák:

$$p_1(x) = 3 + 2x + x^4 + 3x^5 \rightarrow \text{ötödfokú polinom}$$

$$p_2(x) = 2 + x^3 + 3x^4 + 0 \cdot x^5 \rightarrow \text{negyedfokú polinom}$$

Műveletek polinomokkal

Definíció

Legyenek

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad \text{és} \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m.$$

- A két polinom egyenlő, ha $n = m$ és $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.
- A két polinom összege, ha például $n > m$:

$$(p + q)(x) := p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_nx^n.$$

- A két polinom szorzata:

$$(p \cdot q)(x) := p(x) \cdot q(x) = (a_0 \cdot b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_nb_mx^{m+n}.$$

Tehát:

$$\deg(p + q) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$$

$$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$$

Maradékos osztás a polinomok körében

Tétel – polinomok maradékos osztása

Ha

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$s(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0,$$

ahol $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ és $m < n$, akkor egyértelműen léteznek olyan $q(x)$ és $r(x)$ polinomok, hogy

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg(q) = n - m, \quad \deg(r) < m = \deg(s).$$

Példa: $p(x) = x^4 + 3x^2 - 4$, $s(x) = x^2 + 2x$

Definíció

Ha az előző tételben $p(x) = s(x) \cdot q(x)$, azaz $r(x) = 0$, akkor az $s(x)$ **polinom osztója** $p(x)$ -nek, amit $s(x) | p(x)$ -szel jelölünk.

Példa: $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x + 1$, $s(x) = x^2 + x + 1$

Polinomok gyökei

Definíció

Legyen $p(x)$ egy valós (vagy komplex) együtthatós polinom, azaz $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ (vagy $p(x) \in \mathbb{C}[x]$). A $b \in \mathbb{C}$ szám $p(x)$ **gyöke** vagy **zérushelye**, ha $p(b) = 0$.

Megjegyzés: Ha b a $p(x)$ gyöke, akkor $(x - b) \mid p(x)$.

Példák:

- Másodfokú polinomok gyöktényezős alakja:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$, mivel $p(2) = 0$ ezért $x_0 = 2$ egy gyök

Definíció

A b komplex szám a $p(x)$ polinom **k -szoros gyöke**, ha $(x - b)^k \mid p(x)$, de $(x - b)^{k+1} \nmid p(x)$. Ekkor azt is mondjuk, hogy a b gyök **multiplicitása k** .

Pl.: Hányszoros gyöke $x_0 = 1$ az alábbi polinomnak?

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 16x - 6$$

Az algebra alaptétele és következményei

Tétel – az algebra alaptétele

Legyen $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ egy legalább elsőfokú (azaz nem konstans) polinom. Ekkor $\exists x_0 \in \mathbb{C} : p(x_0) = 0$, azaz $p(x)$ -nek van komplex gyöke.

Megj.: Legyen $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ n -edfokú polinom ($n \geq 1$) és $x_0 \in \mathbb{C}$ egy gyöke ennek. Ekkor $(x - x_0) \mid p(x)$, és így:

$$p(x) = (x - x_0) \cdot q(x), \quad \text{ahol } \deg(q) = n - 1.$$

Viszont $q(x)$ -re szintén igaz az algebra alaptétele, ezért létezik $x_1 \in \mathbb{C}$ gyöke, tehát $q(x) = (x - x_1) \cdot q_1(x)$, így

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot q_1(x); \quad \dots$$

Következmények

- Egy n -edfokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n db komplex gyöke van (multiplicitással számolva).
- Egy n -edfokú **valós** együtthatós polinomnak pontosan n db komplex, valamint legfeljebb n db valós gyöke van.

A gyöktényezős alak általában ($\mathbb{R}$ felett)

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_lx + c_l)^{\beta_l}$$

itt $(x - x_i)^{\alpha_i}$: elsőfokú tényezők

és $(x^2 + b_jx + c_j)^{\beta_j}$: másodfokú tényezők,

nem bomlanak szorzattá $\mathbb{R}$ felett

itt vannak a komplex (nem valós) gyökök,

amik páronként konjugáltak

$$n = \deg(p) = \alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_l$$

Ha n páratlan, akkor $\exists \alpha_i \neq 0$, ekkor $x_i \in \mathbb{R}$ gyök.

Még egy következménye az algebra alaptételének

- Ha $p(x)$ valós együtthatós, páratlan fokszámú polinom, akkor van valós gyöke.

A komplex esetben (a gyöktényezős alak $\mathbb{C}$ felett):

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_j)^{\alpha_j}, \quad \text{és itt } n = \alpha_1 + \dots + \alpha_j.$$

Horner algoritmus

- A Horner algoritmus (vagy Horner elrendezés) alkalmas egy polinom helyettesítési értékeinek kiszámolására.
- Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
- Vegyük észre, hogy ekkor

$$p(x) = (\dots ((a_n x + a_{n-1}) \cdot x + a_{n-2}) \cdot x + \dots + a_1) \cdot x + a_0.$$

Példa

$$p(x) = 2x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 14x^2 + 16x - 6, \quad p(-2) = ?, \quad p(1) = ?$$

- Műveletigény Horner elrendezés nélkül: $n - 1 + n = 2n - 1$ db szorzás és n db összeadás
- Műveletigény Horner elrendezéssel: n db szorzás, n db összeadás

Tétel

Egy valós együtthatós polinom $\mathbb{Z}$ -beli gyökei a konstans tag osztói.

A bizonyítás kulcsa: a gyöktényezős alakból következik.

Racionális törtfüggvények

Definíció

Legyenek $p(x)$ és $q(x)$ valós együtthatós polinomok, és tegyük fel, hogy nincs közös gyökük, azaz $\nexists x_0 \in \mathbb{R} : p(x_0) = q(x_0) = 0$. Tegyük fel, hogy $q(x) \not\equiv 0$. Az $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ kifejezést **racionális törtfüggvény**nek nevezzük.

Példa:
$$\frac{2x+14}{x^4-6x^3+10x^2-6x+9} = \frac{2x+14}{(x-3)^2(x^2+1)}$$

Tétel – a parciális törtekre bontás tétele

Legyen $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ racionális törtfüggvény, ahol $q(x)$ az alábbi alakú:

$$q(x) = b_m \cdot (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} \dots (x^2 + b_l x + c_l)^{\beta_l}.$$

Ekkor léteznek $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ konstansok és $s(x)$ polinom, hogy

$$R(x) = s(x) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j}$$

Kombinatorika – Permutáció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tekintsük az $A = \{1, 2, \dots, n\}$ halmazt.

Definíció

A egy **permutációján** A -nak egy önmagára vett bijektív leképezését értjük, azaz az $1, 2, \dots, n$ elemek valamilyen sorrendben való felsorolását.

Jelölje P_n az A halmaz összes permutációinak számát.

- Ekkor $P_1 = 1$.
- Belátjuk, hogy $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Az n elemű halmazból rögzítünk egy elemet. A maradék $n - 1$ elemet P_{n-1} -féleképpen rendezhetjük sorba, majd a rögzített elemet n helyre sorolhatjuk be. Így $P_n = n \cdot P_{n-1}$, azaz $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Tétel

n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek a száma $P_n = n!$.

Példák: (1) Hányféleképpen érhet célba 10 futó egy futóversenyen?

(2) Hány 5-jegyű szám írható fel a 3, 4, 5, 7, 9 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet? És a 2, 2, 2, 7, 7 számjegyekből?

Ismétléses permutáció

Hány 5-jegyű szám írható fel a 2,2,2,7,7 számjegyekből?

Megoldás: Ha megkülönböztetnénk egymástól a ketteseket és a heteseket, akkor $5!$ lenne a sorrend, viszont a kettesek illetve a hetesek cserélgetésével nem kapunk új 5-jegyű számot. $\Rightarrow$ Az ismétlődő elemek lehetséges sorrendjeivel osztanunk kell az $5!$ -t, azaz a végeredmény:

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10.$$

Tétel

Ha n elemünk van k különböző fajtából, az 1. fajtából ℓ_1 , a 2.-ból ℓ_2 , stb. (azaz $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_k = n$), akkor az n elem lehetséges sorrendjeinek a száma

$$P_n^{\ell_1, \dots, \ell_k} = \frac{n!}{\ell_1! \dots \ell_k!}$$

Példa: Van 2 piros, 1 narancs és 3 sárga muskátlink. Hányféleképpen rakhatjuk ki az ablakunkba ezeket a virágokat?

Variáció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz k -ad osztályú ismétlés nélküli variációi alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Itt szükségképpen $n \geq k$.

Azaz a variáció: kiválasztás és sorbarendezés.

Példák:

(1) Hányféleképpen alakulhatnak a dobogós helyezések egy 10 fős futóversenyen?

(2) Egy nyereménysorsoláson 5 különböző díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet?

És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba”? $\rightsquigarrow$ visszatevésees kiválasztás

Ismétléses variáció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz k -ad osztályú ismétléses variációi alatt a halmaz elemeiből visszatevéssel kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma:

$$V_{n,k}^i = n^k.$$

Ismétléses variáció: kiválasztás és sorbarendezés, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

- (1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt?
- (2) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Megoldás: Minden elem esetén döntünk arról, hogy igen vagy nem, azaz bekerüljön-e az elem a részhalmazba, vagy nem.

Tehát 2 elemből n -szer választunk visszatevéssel.

Így az összes részhalmaz megkapható. Összesen $V_{2,n}^i = 2^n$ lehetőség.

A részhalmazok megfelelnek n hosszúságú bináris sorozatoknak:

1001...110.

Kombináció

Definíció és tétel

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz **k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak** nevezzük. Számuk:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}.$$

Definíció szerint $0! = 1$.

Itt szükségképpen $n \geq k$.

Azaz a kombináció: kiválasztás.

Példák:

- (1) Hányféleképpen tölthetünk ki egy ötöslottó szelvényt?
- (2) Egy nyereménysorsoláson 5 *egyforma* díj van, a résztvevők száma 200 fő. Hány lehetséges kimenetele van a sorsolásnak, ha mindenki csak egyszer nyerhet?

És ha az egyes nyertesek kihúzása után „visszadobják a győztes nevét a kalapba”? $\rightsquigarrow$ visszatevésees kiválasztás

Ismétléses kombináció

Definíció és tétel

Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk. Számuk:

$$C_{n,k}^i = \left(\binom{n}{k} \right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ismétléses kombináció: kiválasztás, de mivel egy elemet többször is választhatunk, ezért itt $n < k$ is lehetséges.

Példák:

- (1) Hányféleképpen oszthatunk szét 10 (egyforma) almát 4 ember között?
- (2) Feldobva 3 dobókockát, hányféleképpen alakulhat a dobott számok eloszlása?

Állítás

Legyen $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geq k$. Ekkor

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Binomiális tétel

Tétel – binomiális tétel

Legyen $x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$(x + y)^n = \binom{n}{n} x^n + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \\ + \dots + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{0} y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ kifejezést **binomiális együttható**nak nevezzük.

Állítás

Minden $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ esetén

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Következmények: Pascal-háromszög; n elemű halmaz részhalmazai.

Logikai szita

Pl.: Egy osztályban 32 gyerek van, a következő idegen nyelveket tanulják:

- 16-an angolt, 13-an németet, 13-an franciát;
- 5-en németet és franciát, 7-en németet és angolt, 6-an angolt és fr.-t;
- 4-en mindhárom nyelvet tanulják.

Hányan nem tanulnak idegen nyelvet?

Logikai szita formula

Legyen A egy véges halmaz, $A_1, A_2, \dots, A_k$ ennek bizonyos részhalmazai. Tegyük fel, hogy a halmazok és azok metszeteinek számosságát ismerjük csak. Jelölje S_j az A halmaz azon elemeinek a számát, amelyek $A_1, \dots, A_k$ közül legalább j darabban bene vannak, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Azaz például:

- $S_1 = \#A_1 + \#A_2 + \dots + \#A_k$
- $S_2 = \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \dots = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \#(A_i \cap A_j)$
- $\dots, S_k = \#(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$

Legyen továbbá $S_0 = \#(A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k))$ és $S = \#A$. Ekkor

$$S_0 = S - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^k S_k.$$

Még egy példa a logikai szita formula használatára

Feladat

Egy n házaspárból álló társaság táncol. Hányféleképpen állhatnak úgy párba, hogy senki sem táncol a saját házastársával?

Megoldás: Összesen $n!$ lehetőség.

A kérdés visszavezethető arra, hogy hány olyan permutációja van az $\{1, \dots, n\}$ halmaznak, amikor semelyik szám nem áll „a helyén”.

- Legalább 1 férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{1}(n-1)!$ lehetőség.
- Legalább 2 férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{2}(n-2)!$ lehetőség.
- ...
- Minden férfi a feleségével táncol: $\binom{n}{n}0! = 1$ lehetőség.

Válasz:

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}0! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

Lineáris algebra, vektorterek

Definíció

Egy V nemüres halmazt $\mathbb{R}$ feletti **vektortérnek** és V elemeit vektoroknak hívjuk, ha értelmezve van két művelet:

- (vektor)összeadás: $V \times V \rightarrow V$, $(v, w) \mapsto v + w$,
- skalárral való szorzás: $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$,

amelyek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

Vektorösszeadás:

- (a) kommutatív, azaz $\forall v, w \in V: v + w = w + v$;
- (b) asszociatív, azaz $\forall u, v, w \in V: (u + v) + w = u + (v + w)$;
- (c) létezik **nullvektor**, azaz egy $0 \in V$ vektor, amelyre $v + 0 = v$ ($\forall v \in V$);
- (d) $\forall v \in V$ esetén létezik ún. **ellentett vektor**, azaz egy $-v$ -vel jelölt vektor, hogy $v + (-v) = 0$.

Skalárral való szorzás:

- (a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V: (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
- (b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V: \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;
- (c) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V: \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$;
- (d) $\forall v \in V: 1v = v$.

Példák vektorterekre, altér

- 1 $\mathbb{R}^2$: a sík vektorai. $((x, y)$ alakú elemek, $x, y \in \mathbb{R}$.)
- 2 A legfeljebb n -edfokú valós együtthatós polinomok halmaza:
 $P_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$, $n \in \mathbb{N}$. Elemei:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0; \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Nullvektor: $p \equiv 0$.

- 3 Valós számsorozatok tere, korlátos valós számsorozatok tere.
- 4 $\mathbb{R}^n$, elemei: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Definíció

A V vektortér egy nemüres W részhalmazát V **alterének** nevezzük, ha W maga is vektortér, azaz zárt a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

- 1 $\{0\}$ és V mindig altér. Ezeket **triviális altereknek** nevezzük.
- 2 $\mathbb{R}^2$ -ben az $(x, 0)$ alakú vektorok alteret alkotnak ($x \in \mathbb{R}$).
- 3 Ha $\mathbb{R}^2$ -ben v tetsz. rögzített vektor, $W = \{\lambda v \in V \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ altér.
- 4 $P_3[x]$ -ben $P_2[x]$ altér.

Lineáris kombináció

Definíció

Egy V vektortér $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorainak **lineáris kombinációi** a

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n; \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

alakú (V -beli) vektorok.

Megj.: A nullvektor mindig előáll ún. triviális lineáris kombinációként.

Példák:

- ① $V = P_2[x]$, $p_1(x) = 1 + x^2$, $p_2(x) = 3 - 4x$, $p_3(x) = 2 + x + 2x^2$.

Hogy néz ki egy lineáris kombinációja a megadott vektoroknak?

- ② Egy rögzített $v \neq 0$ vektor lineáris kombinációi: λv alakú vektorok.

- ③ $V = \mathbb{R}^2$, $v = (2, 1)$, $w = (0, 3)$.

A sík mely pontjai kaphatók meg v és w lineáris kombinációjaként?

Tétel és definíció

Legyenek $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok V -ben. Ekkor a $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vektorrendszer összes lineáris kombinációi alteret alkotnak V -ben, amelyet **a vektorrendszer által generált altérnek**, a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok **lineáris lezártjának**, vagy a vektorok által **kifeszített altérnek** nevezünk.

Jele: $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

Lineáris függőség, függetlenség

Vektorrendszer: V vektorainak egy halmaza. (Itt: véges halmaz.)

Definíció

A V vektortér egy $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vektorrendszerét **lineárisan függőnek** nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *nem mind 0* skalárok, hogy

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

(Azaz a nullvektor nemtriviálisan kikombinálható a vektorból.) Ellenkező esetben a vektorrendszer **lineárisan független**.

Megjegyzés: A lineárisan független esetben tehát

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

azt vonja maga után, hogy $\lambda_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Példa: $V = \mathbb{R}^2$, $v = (2, 1)$, $w = (0, 3)$, v és w függetlenek-e?

Tétel

Egy V vektortérnek egy legalább kételemű vektorrendszere pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszer valamely tagja előáll a többi tag lineáris kombinációjaként.

vektorrsz. lineárisan függő $\Leftrightarrow$ valamely vektor a többi lineáris kombinációja

Következmények

- 1 Ha egy vektorrendszerben két vektor egyenlő, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.
- 2 Ha egy vektorrendszerben egy vektor egy másiknak skalárszorosa, akkor a vektorrendszer lineárisan függő.
- 3 Ha a nullvektor benne van egy vektorrendszerben, akkor az függő, tehát lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.
- 4 Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor maga a vektorrendszer is az. Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

Definíció

Egy V vektortér végtelen sok vektorból álló vektorrendszerét **lineárisan független**nek nevezzük, ha bármelyik véges vektorrendszere lineárisan független.

Generátorrendszer, bázis

Definíció

Legyen $\mathcal{G}$ a V vektortér egy vektorrendszere. $\mathcal{G}$ -t a V **generátorrendszerének** nevezzük, ha a $\mathcal{G}$ által generált altér a teljes vektortér. Ekkor tehát V minden vektora előáll $\mathcal{G}$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

Példa: $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ekkor $\{v, w\}$ generátorrendszer. Legyen $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ekkor $\{u, v, w\}$ is generátorrendszer, viszont lineárisan függő, hiszen $6u - 3v + w = 0$. $\Rightarrow$ Egy vektor többféleképpen is kikombinálható az u, v, w vektorokból, pl.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = v + w = 2u + \frac{4}{3}w.$$

Definíció

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V egy **bázisának** nevezzük.

Bázis, dimenzió

Bázis: lineárisan független generátorrendszer.

- Ha a $\mathcal{B}$ vektorrendszer bázis, akkor V minden eleme **pontosan egyféleképpen** kombinálható ki lineárisan $\mathcal{B}$ elemeiből.
- V -nek több (végtelen sok) bázisa van.

Tétel és definíció

A V vektortér bármely két bázisa azonos számosságú. Ha ez a számosság véges, akkor ezt a közös számosságot a vektortér **dimenziójának** nevezzük. Jele: $\dim(V)$. Megjegyzés: ha $V = \{0\}$, akkor $\dim(V) = 0$.

Példák:

- 1 $P_n[x]$ egy bázisa: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Tehát $\dim(P_n[x]) = n + 1$.
- 2 $\mathbb{R}^n$: valós szám n -esek tere. (Összeadás, skalárszorzás koordinátáinként.) Egy bázisa: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ennek neve **természetes (vagy kanonikus) bázis**. $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- 3 $\mathbb{R}^2$: az előző példa speciális esete ($n = 2$). Természetes bázis: $\{e_1, e_2\}$, ahol $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Másik bázis: $\{v, w\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Bázisra vonatkozó koordináták

Tétel

Ha egy n -dimenziós V vektortérben adott egy n elemű lineárisan független vektorrendszer, akkor az bázis.

Definíció

Legyen V vektortér, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ egy bázisa V -nek. Ekkor a fentiek szerint $\forall v \in V$ egyértelműen kombinálható lineárisan $\mathcal{B}$ vektoraiból, azaz egyértelműen léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalárok, hogy

$$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Ezeket a skalárokat a v vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó **koordinátáinak** nevezzük. Ekkor v alakja a $\mathcal{B}$ bázisban:

$$v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vektorrendszer rangja

Definíció

Legyen $\mathcal{A}$ a vektortér egy vektorrendszere. Az $\mathcal{A}$ vektorrendszer **rangja** az általa generált altér dimenziója:

$$\text{rang}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}(\mathcal{A})).$$

Példa: $V = \mathbb{R}^3$, legyen $\mathcal{A} = \{u, v, w\}$, ahol

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $w = 2u + v$, ezért w benne van a másik 2 vektor által generált altérben. Viszont u és v lineárisan független, ezért $\text{rang}(\mathcal{A}) = 2$.

Megjegyzés: Legyen V n -dimenziós vektortér, $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$. Ekkor $\text{rang}(\mathcal{A}) \leq n$ és $\text{rang}(\mathcal{A}) \leq m$.

Tétel

Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha bármely eleméhez hozzáadjuk a többi elem tetszőleges lineáris kombinációját.

Mátrixok

Definíció

Egy m sorral és n oszloppal rendelkező számtáblázatot $m \times n$ -es **mátrix**nak nevezünk.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad A \text{ elemei: } a_{ij} \quad A = (a_{ij})$$

Az összes $m \times n$ -es mátrix halmazát $\mathcal{M}_{m \times n}$ -nel jelöljük.

Definíció

- Ha $n = m$, akkor a mátrix **négyzetes** vagy **kvadratikus**.
- Egy mátrix **főátlója** alatt az $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots)$ szám k -ast értjük ($k = \min\{m, n\}$).
- Két mátrix **egyenlő**, ha azonos típusúak (azaz ugyanannyi soruk és oszlopuk van), és a megfelelő elemeik megegyeznek.
- Azon $n \times n$ -es mátrixot, melynek főátlójában csupa 1-es áll, minden más eleme 0, **n -edrendű** vagy **n -dimenziós egység mátrix**nak nevezzük. Jele: E_n vagy I_n .

Mátrixműveletek

1. Mátrixok összeadása

Csak azonos típusú mátrixokat tudunk összeadni.

Legyenek $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ $m \times n$ -es mátrixok.

Ekkor $C = A + B$, ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

2. Mátrixok skalárral való szorzása

Elemenként végezzük, azaz ha $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, akkor

$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Speciálisan: ha A és B sor-, vagy oszlopvektorok, akkor a fenti 2 művelet éppen a vektorok szokásos összeadása és skalárral való szorzása.

3. Mátrixszorzás

Legyen $A = (a_{ij})$ $m \times k$, $B = (b_{ij})$ $k \times n$ típusú mátrix. Ekkor A és B szorzata az a $C = (c_{ij})$ $m \times n$ típusú mátrix, amelyre

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rj}.$$

Tétel – a mátrixszorzás tulajdonságai

- Ha A $m \times n$ típusú, akkor $E_m \cdot A = A$ és $A \cdot E_n = A$.
- Legyenek A, B mátrixok és tegyük fel, hogy létezik AB . Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- Ha A, B, C olyan mátrixok, hogy AB és BC létezik, akkor $(AB)C = A(BC)$. Azaz a mátrixszorzás asszociatív.
- Ha A és B azonos típusú mátrixok és létezik AC , akkor BC is létezik és $(A + B)C = AC + BC$. Azaz teljesül a disztributivitás.
- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz általában $AB \neq BA$.

Definíció

Legyen A egy $m \times n$ -es mátrix. Azt az A^T -vel jelölt $n \times m$ -es mátrixot, amelynek sorai az A oszlopai A **transzponáltjának** nevezzük.

Állítás – a transzponálás tulajdonságai

- $(A^T)^T = A$ (azaz a transzponálás involutív művelet)
- A transzponálás és a mátrixszorzás kapcsolata: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Definíció

Legyen A egy n -edrendű kvadratikus mátrix.

- A **szimmetrikus**, ha $A^T = A$,
- A **ferdeszimmetrikus**, ha $A^T = -A$.

Példák:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Állítás – szimmetrikus és ferdeszimmetrikus mátrixok tulajdonságai

- Ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.
- Szimmetrikus mátrixok összege szimmetrikus.
- Ferdeszimmetrikus mátrixok összege ferdeszimmetrikus.
- Szimmetrikus mátrixok szorzata nem feltétlenül szimmetrikus.
De ha A és B szimmetrikus és felcserélhetőek (azaz $AB = BA$), akkor AB is szimmetrikus.

Mátrixok inverze

Definíció

Azt mondjuk az A n -edrendű négyzetes mátrixról, hogy **invertálható**, vagy **létezik az inverze**, ha létezik olyan B n -edrendű kvadratikus mátrix, hogy

$$AB = BA = E_n.$$

Tétel

Ha A invertálható, akkor az inverze egyértelmű. Jele: A^{-1} .

Példa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$$

Állítás – a mátrixinvertálás tulajdonságai

- Ha A invertálható, akkor A^{-1} is az és $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Ha A és B invertálható és létezik AB , akkor ez is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Ha A invertálható, akkor A^T is az és $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Determinánsok

Definíció

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és jelölje σ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációját, azaz legyen

$$\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, \quad i \mapsto \sigma(i)$$

bijektív függvény. (Itt $\sigma(i)$ jelöli a permutációban az i . helyen álló elemet.) Azt mondjuk, hogy a σ permutációnál az i és j elem **inverzióban áll**, ha $i < j$ és $\sigma(i) > \sigma(j)$. Egy σ permutáció **páros**, ha benne az inverzióban álló párok száma páros, és **páratlan**, ha ez a szám páratlan.

Példa: $J_4 = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\sigma_1 = (1, 3, 4, 2)$$

Inverziók száma: 2

$$\sigma_2 = (1, 2, 3, 4)$$

Inverziók száma: 0

$$\sigma_3 = (4, 3, 2, 1)$$

Inverziók száma: 6

$$\sigma_4 = (2, 3, 4, 1)$$

Inverziók száma: 3

Determinánsok

Definíció

Legyen $A = (a_{ij})$ egy $n \times n$ -es kvadratikus mátrix. Az A n^2 eleméből válasszunk ki úgy n elemet, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egyet választunk. A kiválasztott elemek alakja:

$$a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \dots, a_{n\sigma(n)}.$$

Az A mátrix determinánsa:

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

Ez az összeg $n!$ tagú. Itt: $\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sigma \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \sigma \text{ páratlan.} \end{cases}$

Példa:

- ❶ $n = 2$: $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- ❷ $n = 3$: $\det(A) = \dots$

Tétel – a determinánsok szorzástétele

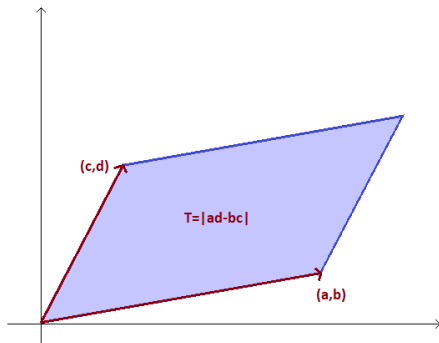
Ha A és B azonos rendű négyzetes mátrixok, akkor

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A determináns szemléletes jelentése

- másodrendű (2x2-es) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített paralelogramma előjeles területe

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



- harmadrendű (3x3-as) determináns: a determináns sorai, mint vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

Állítás – a determináns tulajdonságai

- $\det(A) = \det(A^T)$
- Ha A valamely sora csupa 0 elemből áll, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A két sorát felcseréljük, a determináns -1 -szeresére változik.
- Ha A két sora egyenlő, akkor $\det(A) = 0$.
- Ha A **valamely** sorát megszorozzuk egy λ valós számmal, akkor az így kapott mátrix determinánsa $\lambda \cdot \det(A)$.
- Ha A **minden** sorát megszorozzuk egy λ számmal és A n -edrendű, akkor a kapott mátrix determinánsa $\lambda^n \cdot \det(A)$.
- Ha A két sora egymás skalárszorosa, akkor $\det(A) = 0$.
- Egy mátrix determinánsa nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sor λ -szorosát.
- Ha A valamely sora előállítható a többi sor lineáris kombinációjaként, akkor $\det(A) = 0$.
- A fentiek igazak sorok helyett oszlopokra is.

Következmény

Ha $\det(A) \neq 0$, akkor A sorai (vagy oszlopai) lineárisan független vektorok. Ekkor ha A $n \times n$ -es: sorai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják.

A determináns kapcsolata az invertálással

Definíció

Azt mondjuk, hogy az A négyzetes mátrix **szinguláris**, ha determinánsa 0. Ellenkező esetben (azaz ha $\det(A) \neq 0$) A **reguláris**.

Tétel

Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha reguláris.

Megjegyzés: Legyen A egy reguláris mátrix. Mivel $A \cdot A^{-1} = E$, ahol E az A -val azonos méretű egységmátrix, ezért a determinánsok szorzástétele alapján

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

(Itt az, hogy $\det(E) = 1$, akár a definícióból, akár a determináns kiszámítási módjai alapján könnyen adódik.) A fenti egyenletből következik, hogy A és A^{-1} determinánsa egymás reciproka:

$$\det(A)^{-1} = \det(A^{-1}).$$

A determináns kiszámítási módjai

- ① **Sarrus-szabály:** 2×2 -es és 3×3 -as mátrixok determinánsára
- ② **Gauss-elimináció:** bizonyos – a fenti tulajdonságokat használó – átalakítások révén a mátrixot felső háromszög alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ekkor a determináns éppen a főátlóbeli elemek szorzata. Ezek az átalakítások:
 - ▶ sorcsere, ekkor a determináns előjelet vált;
 - ▶ $\lambda \in \mathbb{R}$ kiemelése egy sorból;
 - ▶ egy sor λ -szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
- ③ **Kifejtési tétel:** Legyen A egy n -edrendű mátrix.
 - ▶ Kiválasztjuk A egy tetszőleges sorát (vagy oszlopát),
 - ▶ ennek minden elemét megszorozzuk az elemhez tartozó algebrai aldeterminánssal,
 - ▶ majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Definíció

Az a_{ij} elemhez tartozó algebrai aldetermináns $(-1)^{i+j} A_{ij}$, ahol A_{ij} annak az $(n-1)$ -edrendű determinánsnak az értéke, amelyet A -ból az i . sor és j . oszlop kihúzásával kapunk.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Az

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

alakú egyenletrendszert, ahol az a_{ij} ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$) és a b_k ($k \in \{1, \dots, m\}$) valós számok ismertek, $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenek, **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

- a_{ij} : az **egyenletrendszer együtthatói**
- b_k : **szabad tagok**, vagy **konstansok**
- az egyenletrendszer **alpmátrixa**, ill. **kibővített mátrixa**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága

A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja: $Ax = b$.

Definíció

A lineáris egyenletrendszer

- **megoldható**, ha van megoldása, azaz létezik olyan $(x_1, \dots, x_n)$ vektor, hogy $Ax = b$ fennáll;
 - ▶ **határozott**, ha pontosan 1 megoldása van;
 - ▶ **határozatlan**, ha több megoldása van;
- **ellentmondásos**, ha nincs megoldása.

Definíció

Egy **mátrix rangja** alatt a mátrix sorai (vagy oszlopai), mint vektorok által alkotott vektorrendszer rangját értjük. Jelölés: $\text{rang}(A)$.

Tétel – rangkritérium

- Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$.
- Ha megoldható és $\text{rang}(A) = n$ (ahol n az ismeretlenek száma), akkor határozott, ha $\text{rang}(A) < n$, akkor határozatlan.

Lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmaza

Definíció

A lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $b = 0$, azaz ekkor mátrixos alakja $Ax = 0$. Egyébként a lineáris egyenletrendszer **inhomogén**.

Megjegyzés: egy homogén lineáris egyenletrendszernek a nullvektor mindig megoldása.

Állítás – homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot $\mathbb{R}^n$ -ben, melynek dimenziója $n - \text{rang}(A)$. Ezt az alteret **megoldástérnek** nevezzük.

Állítás – inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Ha $Ax = b$ megoldható, akkor megoldáshalmaza $x_0 + H$ alakú, ahol

- x_0 a lineáris egyenletrendszer egy rögzített megoldása;
- H a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer (azaz $Ax = 0$) megoldástere.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Két módszer:

- ① Gauss-elimináció
 - ② Cramer-szabály: csak akkor használható, ha $n = m$ és A reguláris.
-
- ① Gauss-elimináció: Az alábbi ekvivalens átalakítások nem változtatják meg a lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát:
 - ▶ Egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$ -val. (Egyenlet $\rightsquigarrow$ kibővített mátrix sorai.)
 - ▶ Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ -szorosát.
 - ▶ Egyenletek sorrendjének megváltoztatása.
 - ▶ Elhagyni olyan egyenletet, amely egy másik egyenlet λ -szorosa.
 - ▶ Ismeretlenek felcserélése együtthatóikkal együtt, minden egyenletben.
(Alapmátrixban: oszlopcsere.)Ezen átalakítások segítségével az egyenletrendszer kibővített mátrixát (ahol a mátrix sorai felelnek meg 1-1 egyenletnek) trapéz alakúra hozzuk (főátló alatt csupa 0), ahonnan visszahelyettesítéssel adódnak a megoldások.
 - ▶ Ha az eljárás közben $(0 \dots 0 | \neq 0)$ sor adódik, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.
 - ▶ Ha az eljárás végén n sor marad, akkor az egyenletrendszer határozott, ha kevesebb, akkor határozatlan.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Két módszer:

- 1 Gauss-elimináció
- 2 Cramer-szabály: csak akkor használható, ha $n = m$ és A reguláris.
- 2 Cramer-szabály:

Tétel – Cramer-szabály

Ha az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer alapmátrixa négyzetes és reguláris, akkor az egyenletrendszer határozott, és egyetlen megoldása $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), ahol az A_i mátrix úgy adódik A -ból, hogy az i -edik oszlopot kicseréljük a szabad tagok oszlopvektorára:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Lineáris transzformációk

Definíció

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett. $\varphi: V \rightarrow V$ **lineáris transzformáció**, ha

- **additív**, azaz $\forall u, v \in V: \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;
- **homogén**, azaz $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$.

Megjegyzés: lineáris transzformációk esetén nullvektor képe nullvektor.

Példák:

- Forgatások, tükrözések, λ -nyújtások.
- Vetítések, pl. $\mathbb{R}^3$ egy rögzített síkjára merőlegesen.
- Identikus transzformáció: $\varphi(v) = v, \forall v \in V$.

Tétel

Egy lineáris transzformációt egyértelműen meghatároz egy bázison való hatása, azaz ha $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázisa V -nek, $w_1, w_2, \dots, w_n$ pedig tetszőleges vektorai a vektortérnek, akkor egyértelműen létezik olyan φ lineáris transzformáció, hogy $\varphi(b_i) = w_i$.

Továbbá ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor ennek φ általi hatása:

$$\varphi(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n.$$

Lineáris transzformációk mátrixa

Definíció

Legyen V egy n -dimenziós valós vektortér, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ bázisa V -nek, tekintsünk továbbá egy $\varphi: V \rightarrow V$ lineáris transzformációt. Ekkor φ -nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó mátrixa az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek i -edik oszlopában $\varphi(b_i)$ -nek a $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátái állnak.

Példa: Legyen $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (2x - y, -12x + 3y)$.

φ mátrixa a természetes bázisban. $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0) = (2, -12)$,
 $\varphi(e_2) = \varphi(0, 1) = (-1, 3)$, ezért φ mátrixa ebben a bázisban

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$$

φ mátrixa a $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (0, -1)$ bázisban. Ekkor $\varphi(b_1) = (1, -9)$ és $\varphi(b_2) = (1, -3)$. Ezeket a vektorokat a (b_1, b_2) bázisban kell felírunk:

$$\varphi(b_1) = (1, -9) = 1 \cdot b_1 + 10 \cdot b_2, \quad \varphi(b_2) = (1, -3) = 1 \cdot b_1 + 4 \cdot b_2.$$

Ezért a mátrix:

$$[A_\varphi]_{(b_1, b_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lineáris transzformáció mátrixának alkalmazása

Állítás

Egy lineáris transzformáció különböző bázisokra vonatkozó mátrixainak megegyezik a rangja és a determinánsa.

Állítás

Ha φ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban A , akkor φ hatása egy v vektoron: $\varphi(v) = Av$.

Példák: Forgatások és tükrözések mátrixa $\mathbb{R}^2$ -ben a természetes bázisban:

$$\text{rot}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{refl}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Így például a $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vektort az origó körül 60° -kal pozitív irányba elforgatva:

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}.$$

Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

Definíció

Legyen $\varphi: V \rightarrow V$ lineáris transzformáció. Egy nem-nulla $v \in V$ vektort φ **sajátvektor**ának hívunk, ha $\exists \lambda \in \mathbb{R}: \varphi(v) = \lambda v$. Ekkor λ -t φ v -hez tartozó **sajátérték**ének mondjuk.

Példák: sajátvektorok forgatás, tükrözés, λ -nyújtás esetén.

Megjegyzések:

- Ha v sajátvektora φ -nek, akkor a hozzá tartozó sajátérték egyértelmű.
- Ha λ sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátvektorok halmaza altér:

$$L_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} \text{ altér } V\text{-ben: a } \lambda\text{-hoz tartozó } \textbf{sajátaltér}.$$

Definíció és tétel

Egy φ lineáris transzformáció **karakterisztikus polinomján** a $\det(A - \lambda E_n)$ n -edfokú polinomot értjük, ahol n a tér dimenziója, A pedig φ mátrixa *tetszőleges* bázisban. Ennek gyökei éppen φ sajátértékei.

Példa sajátértékek, sajátvektorok meghatározására

Határozzuk meg az alábbi φ sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (2x - y, -12x + 3y)$$

Már láttuk, hogy φ mátrixa a természetes bázisban $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix}$. Így φ karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_n) &= \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -12 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -12 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \\ &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) - (-1)(-12) = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 6). \end{aligned}$$

Így a sajátértékek $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 6$. Például a $\lambda_2 = 6$ -hoz tartozó sajátvektorok:

$$\begin{cases} 2x - y = 6x \\ -12x + 3y = 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x - y = 0 \\ -12x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Euklideszi terek

Definíció

Legyen V egy vektortér $\mathbb{R}$ felett és tegyük fel, hogy adott egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

leképezés (azaz bármely v, w vektorokhoz hozzá van rendelve egy $\langle v, w \rangle$ -vel jelölt valós szám), amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

- (a) első változóban additív: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
- (b) első változóban homogén: $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$;
- (c) szimmetrikus: $\langle w, v \rangle = \langle v, w \rangle$;
- (d) pozitív definit: $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$, és $(\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0)$.

Ekkor a $\langle v, w \rangle$ mennyiséget a v és w vektorok **skaláris** vagy **belső szorzatának** nevezzük.

A V vektorteret ellátva egy $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzattal **euklideszi térnek** mondjuk. Jele: $\mathbb{E} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- (a)+(b) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat első változójában lineáris
- ...+(c) $\Rightarrow$ a skaláris szorzat a második változójában is lineáris

Skaláris szorzat: pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma.

Példák euklideszi terekre

(1) $V = \mathbb{R}^2$, $|v|$: a v vektor hossza

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \angle \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ skaláris szorzat } \mathbb{R}^2\text{-n}$$

(2) $V = \mathbb{R}^n$, rögzítsünk egy bázist.

Legyen ebben $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \Rightarrow \text{skaláris szorzat } \mathbb{R}^n\text{-en}$$

$n = 2$ és a természetes bázis választása esetén visszkapjuk (1)-et.

(3) $V = \mathbb{R}^3$, rögzítsünk egy bázist.

Legyen ebben $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$.

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_1 w_2 + v_2 w_1 + 2v_2 w_2 + 3v_3 w_3 \Rightarrow \text{skaláris szorzat } \mathbb{R}^3\text{-on}$$

$\Rightarrow$ Egy vektortéren több skaláris szorzatot is meg tudunk adni.

Definíció

A (2) példában szereplő skaláris szorzatot $\mathbb{R}^n$ **kanonikus** vagy **természetes skaláris szorzatának** hívjuk.

Vektorok normája euklideszi terekben

Definíció

Legyen $\mathbb{E} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér. Egy $v \in V$ vektor **normája** vagy **hossza**

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Megj.: a gyökvonás elvégezhető a belső szorzat pozitív definitisége miatt.

Példa: $\mathbb{R}^2$ -ben a kanonikus belső szorzat esetén: $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |v|$.

Tétel – a norma tulajdonságai

Legyen $\mathbb{E} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér, $\|\cdot\|$ a belső szorzatból származó norma. Erre igazak a következők:

- $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$, továbbá $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- $\|\cdot\|$ **abszolút homogén**: $\forall v \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;
- teljesíti a **háromszög-egyenlőtlenséget**: $\forall v, w \in V$:
 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Itt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha v és w egymásnak nemnegatív skalárszorosa.

Tétel – a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség

Az $\mathbb{E} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér tetszőleges v, w vektoraira

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $v = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Példa: $\mathbb{R}^2$ -ben a kanonikus belső szorzatot tekintve:

$$|v_1 w_1 + v_2 w_2| \leq \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$

Definíció

Legyen v és w az $\mathbb{E}$ euklideszi tér 2 nem-nulla vektora. Ekkor a v és w által **bezárt szög**

$$\arccos \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Ha v vagy w nullvektor, akkor a bezárt szögük def. szerint $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

Megj.: a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség miatt

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Ortogonalis vektorrendszerek

Definíció

- Azt mondjuk, hogy v és w **merőlegesek** vagy **ortogonálisak**, ha $\langle v, w \rangle = 0$. Jelölés: $v \perp w$.
- Azt mondjuk, hogy $v \in V$ **egységvektor**, ha $\|v\| = 1$.

Megj.: $\forall v \in V, v \neq 0$ esetén $\frac{v}{\|v\|}$ egységvektor.

Állítás

Legyen e egységvektor. Ekkor $\langle v, e \rangle$ a v vektor e -re eső merőleges vetületének a hossza, $\langle v, e \rangle e$ pedig v -nek az e -re eső merőleges vetülete.

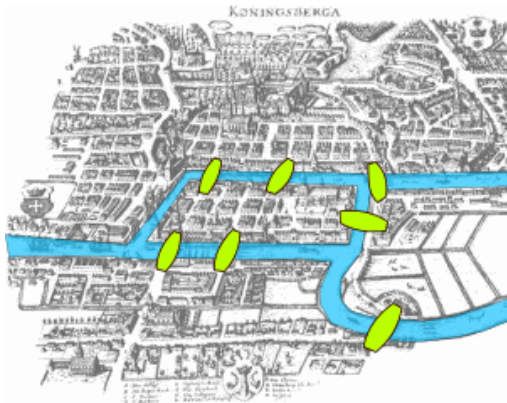
Definíció

Egy $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszert **ortogonálisnak** nevezünk, ha elemei páronként ortogonálisak, azaz $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$. A vektorrendszer **ortonormált**, ha elemei páronként merőleges egységvektorok.

A gráfelmélet alapjai

A königsbergi hidak problémája – Leonard Euler, 1736

Be lehet-e járni a königsbergi Pregel folyóban lévő két szigetet a partokkal és egymással összekötő 7 hivat úgy, hogy mindegyikre csak egyszer lépünk rá és visszatérünk a kiindulási pontra?



Képek forrása: Wikipedia.

Írányított gráfok

Definíció

Legyenek E és $C \neq \emptyset$ diszjunkt halmazok, és legyen $\varphi: E \rightarrow C \times C$ leképezés. Ekkor a $G = (E, \varphi, C)$ hármast **írányított gráfnak** nevezzük. E -t a gráf **éleinek**, C -t a gráf **csúcsainak** hívjuk. A $G = (E, \varphi, C)$ gráf **véges**, ha E és C véges számosságú halmazok.

Példa: Legyen a $G = (E, \varphi, C)$ gráf esetén $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, továbbá φ az élekhez rendelje az alábbi csúcspárokat:

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= (c_1, c_2) & \varphi(e_2) &= (c_3, c_1) & \varphi(e_3) &= (c_3, c_2) \\ \varphi(e_4) &= (c_2, c_3) & \varphi(e_5) &= (c_3, c_3)\end{aligned}$$

Definíció

A fenti gráfban e_5 **hurokél**, e_3 és e_4 pedig **párhuzamos élek**, de nem szigorúan párhuzamos élek.

Irányítatlan gráfok

Definíció

Legyenek E és $C \neq \emptyset$ diszjunkt halmazok, és jelölje $C * C$ a C -beli elemekből álló rendezetlen párok halmazát. Legyen továbbá $\varphi: E \rightarrow C * C$ egy leképezés. Ekkor a $G = (E, \varphi, C)$ hármast **(irányítatlan) gráfnak** nevezzük.

Megj.: Irányítatlan gráfban nincs különbség a párhuzamos és szigorúan párhuzamos élek között $\rightsquigarrow$ **többszörös élek**. Egy gráfot **egyszerű gráfnak** nevezünk, ha sem párhuzamos éleket, sem hurokéleket nem tartalmaz.

Definíció

A $G = (E, \varphi, C)$ gráf $c \in C$ **csúcsának a fokán** a csúcsra illeszkedő élek számát értjük. (A hurokéleket kétszer számoljuk.) Jele: $\delta(c)$.

Tétel – kézfogási tétel

Egy $G = (E, \varphi, C)$ véges gráf esetén a csúcsok fokszámainak összege egyenlő az élek számának kétszeresével.

Következmény

Egy véges gráf páratlan fokszámú csúcsainak a száma páros.

Euler-vonal, Euler-gráf

Definíció

Egy $G = (E, \varphi, C)$ gráf $e_1, e_2, \dots, e_n$ összefüggő élsorozatát **Euler-vonal**-nak nevezzük, ha G minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha ráadásul a kiinduló és a befejező csúcs megegyezik, akkor **Euler-kör**ről beszélünk.

Definíció

Egy G gráf **Euler-gráf**, ha van benne Euler-kör.

Tétel

Egy G gráf pontosan akkor Euler-gráf, ha összefüggő és minden csúcsának foka páros.

